

N° 114

THÈSES

présentées

à la Faculté des Sciences

de l'Université de Lyon

pour obtenir

le titre de docteur de l'Université de Lyon

(Sciences Mathématiques)

par

M^r René HAYART

licencié-es-sciences, diplômé d'études supérieures de mathématiques

1^{ère} THÈSE : Complément à l'étude du potentiel et des fonctions
harmoniques

2^{ème} THÈSE : Les espaces de Riemann

Soutenues le 9 mai 1946 devant la Commission
d'Examen

Monsieur EYRAUD Président

Messieurs SIRE

et MALÉCOT, Examineurs

LYON

Imprimerie de la Martinière

1946

THÈSES

Présentées à la Faculté des Sciences de Lyon

PAR M^r R. HAYART

DIPLOMÉ D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DE MATHÉMATIQUES

1^{re} THÈSE : COMPLÉMENT A L'ÉTUDE DU POTENTIEL
ET DES FONCTIONS HARMONIQUES

2^{me} THÈSE : ESPACES DE RIEMANN

A MES ANCIENS MAÎTRES
HOMMAGE DE PROFONDE RECONNAISSANCE

UNIVERSITÉ DE LYON - FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen

M. DOUIN, *, ☼, ☼ I.

Assesseur

M. EYRAUD, ☼ I., *Calcul différentiel et intégral.*

Doyen honoraires

M. LONGCHAMBON, *, ☼, ☼ I., +.

Professeurs honoraires

MM. VESSIOT, C. *, ☼ I.

MM. VANEY, *, ☼ I., +.

COUTURIER, *, ☼ I., +.

MEUNIER, O. *, ☼ I.

DULAC, *, ☼ I.

SIRE, *, ☼ I., +.

Professeurs

MM. LOCQUIN, *, ☼ I., *Chimie générale.*

LONGCHAMBON, *, ☼, ☼ I., +, *Minéralogie.*

DOUIN, *, ☼, ☼ I., *Botanique.*

DÉJARDIN, *, ☼ I., *Physique.*

SOLLAUD, ☼ I., *Zoologie.*

THIBAUD, ☼ I., *Physique expérimentale.*

EYRAUD, ☼ I., *Calcul différentiel et intégral.*

THORAL, ☼ A., *Géologie.*

FROMAGEOT, ☼ I., *Chimie biologique.*

AUMÉRAS, ☼ I., *Chimie physique.*

DŒUVRE, ☼ I., *Chimie organique.*

PRETTRE, *Chimie minérale.*

KÜHNER, *Botanique.*

N..., *Physiologie.*

N..., *Chimie.*

N..., *Chimie industrielle.*

Maîtres de conférences et chargés de cours

MM. CORDIER, ☼ A., ☼, *Physiologie.*

DE LARAMBERGUE, *Zoologie.*

VILLE, *Mécanique rationnelle.*

MALÉCOT, *Mathématiques.*

Maîtres des conférences adjoints

M. VIRET, ☼ I., *Géologie.*

Chargés de cours complémentaires

MM. DUFAY, *Astronomie et Physique supérieure.*

TRONCHET, ☼ A., *Botanique.*

MAYET, ☼, ☼ I., +, *Anthropologie.*

PELOSSE, ☼ I., *Sériciculture.*

COLONGE, ☼ A., *Chimie générale.*

M^{me} CHAIX, *Chimie biologique.*

M. BERNARD, *Physique.*

Secrétaire

M. ROUX, ☼ A.



Première Thèse

Complément à l'étude du potentiel et des fonctions harmoniques.

Introduction

Une notion générale domine toute l'analyse, la notion de limite. Et cette notion se rattache étroitement la notion d'approximations successives qui n'en constitue d'ailleurs qu'un aspect. On oppose parfois la méthode de Liard relative aux théorèmes d'existence à l'emploi des séries entières, or ces dernières imposent aux fonctions qui interviennent certaines hypothèses surabondantes, mais au fond il s'agit malgré tout d'une méthode d'approximations successives (la somme des n premiers termes pouvant être considérée comme la $n^{\text{ème}}$ approximation.)

La formule fondamentale de l'étude des fonctions harmoniques

$$V_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} V_{1i} \frac{\cos(\angle_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 + \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{dV_{1i}}{dn_1} \times \frac{d\sigma_1}{r_{10}}$$

dans l'espace à 3 dimensions et

$$V_0 = + \frac{1}{2\pi} \int_{C_1} V_{1i} \frac{\cos(\angle_{10} N_1)}{r_{10}} ds_1 - \frac{1}{2\pi} \int_{C_1} \frac{dV_{1i}}{dn} \mathbf{L} \frac{r_{10} ds_1}{r_{10}}$$

dans le plan, m'a conduit tout naturellement à l'utiliser pour résoudre le problème de Neumann par approximations —

successives et pour retrouver la formule de Dirichlet. Dans ce travail je ne développe ma méthode que dans le cas de l'espace à 3 dimensions ce qui me permet de m'appuyer sur les résultats de l'ouvrage de M^r Günther⁽¹⁾ (Théorie du potentiel - Collection de monographies des fonctions, dirigée par E. Borel). Cette méthode ne constitue qu'un nouveau procédé de calcul mais elle ne peut servir à établir le théorème d'existence que dans le cas où la surface est convexe. (On utilise alors le raisonnement qui a développé Neumann pour résoudre le problème de Dirichlet⁽²⁾). En effet pour la justifier je me sers de la méthode de Fredholm et Plemelj permettant de résoudre et de discuter simultanément les problèmes de Neumann et de Dirichlet - comme je me sers également d'un théorème de Liapounoff relatif à la dérivée normale du potentiel de double couche, j'ai été conduit à prendre pour surface portant les données, une surface de Liapounoff d'exposant $\alpha = 1$. A cette occasion j'indique un troisième énoncé du théorème envisagé.

Tout ce qui précède ne fait intervenir que des intégrales de Riemann ou des limites de telles intégrales, dans une deuxième partie j'utilise des intégrales de Lebesgue ou des limites de telles intégrales. Ceci me conduit à étendre les théorèmes classiques relatifs aux potentiels de simple et de double couche, pour le cas où la densité est bornée et mesurable au lieu d'être continue. Ici je raisonne dans l'espace à deux dimensions en commençant d'abord par une couche portée par un

(1) Cet ouvrage sera désigné dans la suite par les lettres T.P.G.

(2) Cours d'analyse de Liard.

suivant sa devise (cette méthode est inspirée de l'ouvrage de Kellogg *Integration of Potential Theories*). J'utilise à cette occasion un théorème de Lebesgue relatif à la convergence d'une fonction bornée et mesurable vers une fonction continue (Exposé sur l'intégration de la collection Borel)⁽³⁾.

Ensuite je donne une généralisation de la formule de Poisson, que Fatale avait déjà indiquée dans la thèse, mais ma méthode est différente de la sienne. La formule de Poisson généralisée m'a conduit à donner un théorème relatif à l'approximation des fonctions mesurables à l'aide d'une suite de fonctions continues.

Revenant Borel m'a écrit à propos que les résultats que j'ai obtenus relativement à l'étude des potentiels, m'ont servi pour les particularités de résultats récents de Egon (American Journal p. 217 du volume 15 - Avril 32). J'ai l'intention de reprendre l'étude des potentiels et des fonctions harmoniques en établissant rigoureusement la nature d'intégrale de Lebesgue-Stieltjes qui est d'introduire la notion de densité; l'intégration s'effectuant par rapport aux mesures.

Je vous prie de me dire de remercier Monsieur
Sire, Eugène, M. Lévy

Professeur de mathématiques à la Faculté
des Sciences de Lyon.

(3) Ce ouvrage me dédiqué par les lettres L.I.B.

1^{ère} Partie

Méthode d'approximations successives pour résoudre le problème de Neumann.

Chapitre 1. Généralités et mise en équation...

1) Dans ce qui suit nous raisonnerons dans l'espace à 3 dimensions pour pouvoir utiliser les résultats de l'ouvrage de Gunther indiqué dans l'introduction, mais les résultats s'étendent à l'espace à $n > 3$ dimensions et au cas du plan (avec de légères modifications en ce qui concerne ce dernier cas).

Ayant besoin pour nos démonstrations d'un théorème de Liapounoff relatif aux dérivées normales du potentiel de double couche, nous supposons que l'exposant λ , des surfaces portant les données, est égal à l'unité.

Nous supposons également que la fonction harmonique cherchée satisfait à l'identité

$$(I) \quad V_0 = \frac{3}{4\pi} \int_{S_1} V_{1i} \frac{\cos(\alpha_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 - \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{dV_{1i}}{dn_1} \cdot \frac{d\sigma_1}{r_{10}}, \quad \beta = 1$$

dans le cas du problème extérieur et à l'identité

$$(I') \quad V_0 = \frac{3}{4\pi} \int_{S_1} V_{1e} \frac{\cos(\alpha_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1 - \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{dV_{1e}}{dn_1} \cdot \frac{d\sigma_1}{r_{10}}, \quad \beta = -1$$

dans le cas du problème intérieur. On sait que dans ces conditions le problème de Neumann admet au plus une solution (définie à une constante additive près pour le problème intérieur).

Supposons que l'on puisse mettre la solution sous la forme

$$(2) \quad V_0 = V_0^{(0)} + \sum V_0^{(1)} + \dots + \sum^n V_0^{(n)} + \dots$$

les $V^{(n)}$ étant harmoniques à l'intérieur de (D_i) (ou de D_e), et que de plus la série des limites quand M_0 tend vers un point m de (S) en restant dans (D_i) (ou dans D_e)

$$(3) \quad \bar{V}^{(0)} + \sum \bar{V}^{(1)} + \dots + \sum^n \bar{V}^{(n)} + \dots$$

soit uniformément convergente quand m décrit (S) .

D'après un théorème de Harnack (cours d'analyse de Goursat t. III p. 189) on peut affirmer que la série (2) est uniformément convergente quand M_0 se déplace dans (D_i) (ou dans D_e), que sa somme V_0 n'est harmonique et qu'enfin la limite V_i (ou V_e) de V_0 quand $M_0 \rightarrow m$ est précisément la somme de la série (3)

Remplaçant dans (1) V_0 et V_i par leurs valeurs respectives (2) et (3), on obtient en tenant compte de la donnée:

$$V_0^{(0)} + \sum V_0^{(1)} + \dots + \sum^n V_0^{(n)} + \dots = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} f_1 \frac{d\sigma_1}{r_{10}} + \\ + \frac{\sum}{4\pi} \int_{S_1} (\bar{V}_1^{(0)} + \sum \bar{V}_1^{(1)} + \dots + \sum^n \bar{V}_1^{(n)} + \dots) \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1$$

En intégrant termes à termes (ce qui est légitime en vertu de la continuité uniforme) et identifiant les coefficients des mêmes puissances de $\sum$ dans les 2 membres, on a:

$$(4) \quad V_0^{(0)} = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} f_1 \frac{d\sigma_1}{r_{10}}, \dots, V_0^{(n)} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \bar{V}_1^{(n-1)} \frac{\cos(r_{10} N_1)}{r_{10}^2} d\sigma_1, \dots$$

Ces relations permettent de calculer les $V^{(n)}$ de proche en proche. Pour prouver que la série (2) que nous venons de construire résout effectivement le problème, il suffit de montrer :

- a) que la série (3) est uniformément convergente pour $z=1$
- b) que l'on a en tout point de (S)

$$(5) \quad \left(\frac{dV_i}{dn} \right)_1 = f_1$$

2) Supposons provisoirement le premier point établi et démontrons le second. Posons :

$$(6) \quad V_0 = V_0^{(0)} + W_0$$

Grâce à l'hypothèse de la convergence uniforme de la série (3), W_0 est un potentiel de double couche ayant pour densité la fonction continue $\frac{V_i}{4\pi}$. En effet cette hypothèse permet l'intégration terme à terme et d'autre part, elle assure la continuité de V_i , chacun des termes étant continus comme limite sur la frontière d'un potentiel de double couche à densité continue (il n'y a que le premier terme qui est la limite d'un potentiel de simple couche à densité continue.)

Tenant compte de la continuité du potentiel de simple couche et de la formule donnant le saut du potentiel de double couche, on a :

$$V_i - V_e = V_i^{(0)} - V_e^{(0)} + W_i - W_e.$$

d'où

$$= 0 + 4\pi \frac{V_i}{4\pi} = V_i$$

$$V_e = 0$$

et par suite

$$V_0^{(0)} = 0 \quad \text{dans } (D_e)$$

donc

$$W_0 = -V_0^{(0)} \quad \text{dans } (D_e)$$

Il en résulte donc que W admet une dérivée normale par l'extérieur.

$$(7) \quad \frac{dW_e}{dn} = - \frac{dV_e^{(0)}}{dn}$$

Le potentiel de double couche W ayant une densité continue $\underline{V_i}$, un théorème de Liapounoff (T. P. G. p. 71) permet d'affirmer qu'il admet une dérivée normale par l'intérieur telle que :

$$\frac{dW_i}{dn} = \frac{dW_e}{dn} = \frac{dV_e^{(0)}}{dn}$$

Finalement on a, en tenant compte de la formule donnant le saut des dérivées normales du potentiel de simple couche

$$(8) \quad \frac{dV_i}{dn} = \frac{dV_i^{(0)}}{dn} - \frac{dV_e^{(0)}}{dn} = 4\pi \times \frac{1}{4\pi} = 1$$

c'est précisément ce que nous voulions établir.

3) Revenons à l'étude de la série (3). Les formules (4) nous donnent à la limite quand M_0 tend vers le point m de (5)

$$(9) \quad V_i^{(n)} = \lim \left(\frac{1}{4\pi} \int_{S_i} V_{ii}^{(n-1)} \frac{\cos(\underline{r}_{i0} N_i)}{r_{i0}^2} d\sigma_i \right) \\ = \frac{1}{4\pi} \int_{S_i} V_{ii}^{(n-1)} \frac{\cos(\underline{r}_i N_i)}{r_i^2} d\sigma_i + 2\pi \frac{V_i^{(n-1)}}{4\pi}$$

avec $\underline{r}_i = \underline{m}M_i$ et en supposant $n > 1$ (sinon $V^{(n)}$ serait un potentiel de simple couche)

En écrivant la relation (9) sous la forme

$$(9') \quad V_i^{(n)} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_i} [V_{ii}^{(n-1)} + V_i^{(n-1)}] \frac{\cos(\underline{r}_i N_i)}{r_i^2} d\sigma_i, \quad n > 1$$

qui résulte des formules de Gauss, on est conduit à étudier l'équation intégrale

$$(10) \quad \mathcal{I}_0 = \frac{3}{4\pi} \int_{S_i} (\mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_1) \frac{\cos(\underline{r}_{i0} N_i)}{r_{i0}^2} d\sigma_i + V_{0i}^{(0)}, \quad \mathcal{I} = 1$$

M_0 et M_1 étant sur (5). On voit en effet, que si l'on cherche la solution de (10) sous forme de série entière en ζ , on obtient la série (3).

Écrivons encore (10) sous la forme

$$(11) \quad \mathcal{D}_0 = \frac{\zeta}{2\pi(2-\zeta)} \int_{S_1} \mathcal{D}_1 \frac{\cos(\kappa_{10} N_1)}{\kappa_{10}^2} d\sigma_1 + \frac{2 V_{0i}^{(0)}}{2-\zeta}, \quad \zeta = 1$$

ou

$$(12) \quad \mathcal{D}_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{S_1} \mathcal{D}_1 \frac{\cos(\kappa_{10} N_1)}{\kappa_{10}^2} d\sigma_1 + (1+\lambda) V_{0i}^{(0)}$$

avec $\lambda = \frac{\zeta}{2-\zeta}$ et $\zeta = 1$

Sous cette forme on voit que (12) donne la densité du potentiel de double couche résolvant le problème extérieur de Dirichlet correspondant à la donnée $2\pi \times 2 V_{0i}^{(0)}$ sur (5).

On sait que la résolvante de l'équation équivalente à (12) dont le noyau est borné n'a pas de pôles complexes de modules non supérieur à l'unité et que $+1$ et -1 ne peuvent qu'être des pôles simples, par suite pour $|\lambda|$ assez petit on peut mettre la solution de (12) sous la forme:

$$(13) \quad \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0^{(0)} + \lambda \mathcal{D}_0^{(1)} + \dots + \lambda^n \mathcal{D}_0^{(n)} + \dots$$

Avant la résolution effective du problème intérieur à l'aide de l'équation (12) nous allons passer à la mise en équation du problème extérieur.

4) Si au lieu de remplacer V_i par la somme de la série (3) dont la relation (1), nous remplaçons V_e par cette même série dans la relation (1'). Des calculs analogues aux précédents conduisent à remplacer les relations de récurrence (4) par les relations

$$(4') \quad V_0^{(0)} = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} f_1 \frac{d\sigma_1}{r_{10}}, \dots, V_0^{(n)} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} V_{1e}^{(n-1)} \frac{\cos(\kappa_{10} N_1)}{\kappa_{10}^2} d\sigma_1, \dots$$

Des raisonnements analogues aux précédents conduisent à l'étude de l'équation intégrale

$$(12') \quad \mathcal{G}_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{S_1} \mathcal{G}_1 \frac{\cos(\kappa_{10} N_1)}{\kappa_{10}^2} d\sigma_1 + (1-\lambda) V_{0e}^{(0)}$$

avec $\lambda = \frac{3}{2+3}$ et $\beta = -1$

Cette équation donne la densité du potentiel de double couche résolvant le problème intérieur de Dirichlet correspondant à la donnée $2\pi \times 2 V_e^{(0)}$ sur (S). Pour $|\lambda|$ assez petit la solution de (12') peut se mettre sous la forme:

$$(13') \quad \mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_0^{(0)} + \lambda \mathcal{G}_0^{(1)} + \dots + \lambda^n \mathcal{G}_0^{(n)} + \dots$$

Chapitre 2 - Résolution effective du problème de Neumann.

1) Supposons d'abord qu'il s'agisse du problème intérieur dans le cas E (ou dans son cas particulier, le cas ordinaire)

On sait que dans le cas E, $\lambda = -1$ n'est pas un pôle de la solution

$\mathcal{G}_0$, $\lambda = 1$ n'en sera pas un non plus si les conditions suivantes sont réalisées

$$(14) \quad \int_S V_i^{(0)} \psi^{(l)} d\sigma = 0, \quad l = 1, 2, \dots, K$$

les $\psi^{(l)}$ constituant un système de solutions fondamentales, linéairement indépendantes, de l'équation associée à (12). Ceci étant transformons les conditions (14), en remplaçant $V_0^{(0)}$ par sa valeur déduite de (4), on obtient:

$$(15) \quad \int_S \left(\int_{S_1} f_1 \frac{d\sigma_1}{r_{10}} \right) \psi^{(l)} d\sigma = \int_{S_1} \left(\int_S \frac{\psi^{(l)} d\sigma}{r_{10}} \right) f_1 d\sigma_1 = 0$$

or on peut choisir les $\psi^{(l)}$ pour que

$$(16) \quad \int_S \psi^{(l)} d\sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } M_1 \text{ n'est pas sur } S^{(l)} \\ c^k & \text{si } M_1 \text{ se trouve sur } S^{(l)} \end{cases}$$

(T.P.G. p. 181, par. 14)

Il en résulte que les conditions (14) peuvent être remplacées par les suivantes

$$(17) \int_{S(l)} f d\sigma = 0, \quad l = 1, 2, \dots, K$$

Les conditions étant supposées réalisées, le rayon de convergence de (13) (qui est indépendant de la position de M_0 sur S) est supérieur à l'unité. Comme à la région $|\zeta| \leq 1$ correspond la région intérieure à un cercle du plan des λ qui est contenu dans le cercle $|\lambda| \leq 1$, on peut affirmer que $\mathcal{D}_0$ considéré comme fonction de ζ est développable en série uniformément convergente (quand M_0 décrit S) pour $\zeta = 1$. Ceci justifie la propriété (a), du chapitre 1, que nous avons laissée provisoirement sans démonstration.

2) Dans le cas (J) $\lambda = -1$ peut être un pôle de la résolvante et par suite de $\mathcal{D}_0$, mais comme il est simple, la série

$$(18) (1+\lambda) \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0^{(0)} + \lambda [\mathcal{D}_0^{(0)} + \mathcal{D}_0^{(1)}] + \dots + \lambda^n [\mathcal{D}_0^{(n-1)} + \mathcal{D}_0^{(n)}] + \dots$$

sera convergente pour $\lambda = 1$, si cette valeur n'est pas un pôle de $\mathcal{D}$, ce qui est nécessaire pour que (12) ait une solution pour $\lambda = 1$.

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que l'on ait

$$(19) \int_S V^{(0)} \psi d\sigma = 0 \quad \psi \text{ désignant la solution fondamentale associée à (12), relative au pôle } \lambda = -1. \text{ Remplaçant } V^{(0)} \text{ par la valeur dans (19) on obtient}$$

$$(20) \int_S \left(\int_{S_1} \frac{f_1 d\sigma_1}{r_{10}} \right) \psi d\sigma = \int_{S_1} \left(\int_S \frac{\psi d\sigma}{r_{10}} \right) f_1 d\sigma_1 = 0$$

ou $\int_S \frac{\psi d\sigma}{r_{10}} = Ck$ quand M_1 décrit S , ce qui est le cas; par suite (19) prend la forme

$$(21) \int_S f d\sigma = 0$$

Si cette condition est remplie le deuxième membre de (18) considéré comme fonction de ζ est uniformément convergente (quand M_0 décrit S) pour $\zeta = 1$ d'après ce qui a été démontré à la section 1). Comme $1 + \lambda = \frac{2}{2 - \zeta}$

$\mathcal{D}_0$ sera également une série en $\mathcal{Z}$, uniformément convergente pour $\mathcal{Z}=1$

3) Passons au problème extérieur et supposons d'abord que l'on soit dans le cas E (ou dans le cas ordinaire). Dans ces conditions $\lambda = -1$ n'est pas un pôle de $\mathcal{D}_0$, $\lambda = +1$ peut être un pôle, mais comme il est simple la série

$$(18') \quad (1-\lambda) \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0^{(0)} + \lambda [\mathcal{D}_0^{(0)} + \mathcal{D}_0^{(1)}] + \dots + [\mathcal{D}_0^{(n-1)} + \mathcal{D}_0^{(n)}] + \dots$$

a un rayon de convergence supérieur à l'unité. Comme à la région $|\mathcal{Z}| \leq 1$ correspond une région du plan des λ , qui est intérieur au cercle $|\lambda| \leq 1$, on peut affirmer que le deuxième membre de (18') considéré comme fonction de $\mathcal{Z}$, sera uniformément convergente (quand M_0 décrit S) pour $\mathcal{Z}=1$. Il en sera de même pour $\mathcal{D}_0$. La suite du raisonnement s'effectue comme dans les cas précédents.

4) Dans le cas (J) pour que $\lambda = -1$ ne soit pas un pôle de $\mathcal{D}_0$, c'est-à-dire pour que le problème intérieur de Dirichlet soit résolvable par une double couche, il faut et il suffit que l'on ait :

$$(22) \quad \int_S V_e^{(l)} \psi^{(l)} d\sigma = 0, \quad l=1, 2, \dots, K$$

K désignant le nombre des surfaces intérieures et $\psi^{(l)}$ ($l=1, 2, \dots, K$) un système de solutions fondamentales, linéairement indépendantes, de l'équation associée à (12').

Ceci étant, transformons les conditions (22) en remplaçant $V_e^{(l)}$ par la valeur tirée des relations (14'), on obtient :

$$(22') \quad \int_S \left(\int_{S_1} f_1 \frac{d\sigma_1}{z_{10}} \right) \psi^{(l)} d\sigma = \int_{S_1} \left(\int_S \frac{\psi^{(l)} d\sigma}{z_{10}} \right) f_1 d\sigma_1 = 0$$

les $\psi^{(l)}$ étant choisis de façon que.

$$(23) \quad \int_S \frac{\psi^{(l)} d\sigma}{z_{10}} = \begin{cases} 0 & \text{si } M_1 \text{ n'est pas sur } S^{(1)} \\ c_k & \text{si } M \text{ se trouve sur } S^{(k)} \end{cases}$$

(T. P. G. pag 187), il en résulte que les conditions (22) peuvent être remplacées par les suivantes

$$(24) \quad \int_{S^{(k)}} f d\sigma = 0, \quad l=1, 2, \dots, K$$

La suite du raisonnement se fait par analogie avec les cas précédents.

Remarques. Comme il a été dit dans l'introduction, le procédé que nous d'utiliser fait appel à l'étude des problèmes de Robin, de Neumann et de Dirichlet à l'aide de 2 équations de Fredholm associées. Néanmoins la justification peut se faire directement par la méthode que Neumann utilisa pour le problème de Dirichlet, dans le cas des surfaces convexes. Dans ces conditions la méthode utilisée prouve effectivement l'existence d'une solution.

2) La méthode de résolution du problème de Neumann à l'aide d'une équation de Fredholm permet d'obtenir la solution sous forme d'une série dont les termes sont des potentiels de simple couche, la densité de celui de rang n étant proportionnelle à la dérivée normale $\left(\frac{dV}{dn}\right)_i$ [ou $\left(\frac{dV}{dn}\right)_e$] de celui de rang $(n-1)$.

La méthode qui vient d'être développée donne au contraire la solution sous la forme d'une série dont les termes sont des potentiels de double couche, la densité de celui de rang n étant proportionnelle à la limite par l'intérieur (ou par l'extérieur) de celui de rang $(n-1)$.

3) Dans le cas du plan on peut appliquer le procédé du cas du cercle et comparer avec la formule de Dirichlet.

4) Dans la démonstration que donne M^r Gunther du théorème de Liapounoff (T.P.G. p. 71), il signale en remarque que l'on peut remplacer dans le 2^e énoncé κ_{10} par $\kappa_{10} |\log \kappa_{10}|$.

Comme on peut remplacer également cette quantité par $\kappa_{10}^\nu = \kappa_{10}^{1-\varepsilon}$, ε étant arbitrairement petit, on est conduit à remplacer dans ce 2^e énoncé κ_{10} par κ_{10}^ν à condition que l'on ait

$$\lambda + \nu > 1.$$

Il suffit de se reporter à la démonstration pour justifier cette affirmation.

2^{ème} Partie

Potentiels de surfaces à densité bornée et mesurable.

Généralisation des théorèmes classiques et application à l'étude des fonctions mesurables.

Chapitre 1 - Généralités 1) Dans ce qui suit le symbole $\int$ désignera une intégrale de Lebesgue ou la limite d'une telle intégrale quand on exclut un point de non sommabilité de la fonction à intégrer, à l'aide d'un intervalle que l'on fait tendre vers zéro d'une façon arbitraire. Les courbes (c) qui limiteront les domaines envisagés seront des courbes de Liapounoff c'est-à-dire des courbes de Jordan possédant une normale en chacun de leurs points, telle que a) (1) angle aigu $\vec{N}_1, \vec{N}_2 < E \alpha_{21}^\lambda$; $E = C^k > 0$, $0 < \lambda = C^k \leq 1$ N_1 et N_2 étant les normales en M_1 et M_2 distants de r_{21} .

b) Toute parallèle à la normale N en M rencontre la portion de (c) intérieure au cercle (L) de centre M et de rayon ρ , indépendant de M, en un point au plus.

Le cercle (L) sera appelé cercle de Liapounoff attaché à M.

Nous indiquerons tout démonstration les définitions et résultats qui suivent pour abréger la rédaction (il suffit d'opérer par analogie avec T. P. G.)

2) Prenant comme axe la tangente et la normale en M l'équation de la portion de (c) intérieure à (L), peut se mettre sous la forme $y = f(x)$

$f(n)$ admettant une dérivée régulièrement continue.

Le cosinus de l'angle de la normale en M avec une droite fixe quelconque est une fonction régulièrement continue d'exposant λ . Si d est choisi tel que $E d^\lambda < \frac{\pi}{4}$ la portion C' de (C) intérieure à (L) est d'un seul morceau connexe.

Avec la même hypothèse toute droite faisant avec N un angle inférieur à $\cos^{-1} \frac{\pi}{4}$ et indépendant de M , rencontre C' en un point au plus. L'angle α dépend de d et tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand d tend vers zéro.

Convenons une fois pour toute que les lettres introduites désignent des C^k (sans s'astreindre à garder constamment les mêmes notations). Ceci étant, on a en utilisant comme axes la tangente et la normale en M_0

(2) $|y| < a|x|^{1+d}$, $|y| < b|x|^{1+d}$, $|\cos(\alpha N)| < c|x|^\lambda$
 x et y désignant les coordonnées d'un point de C' à la distance x de M_0 . L'élément d'arc de (C') est tel que

$$(3) \quad |ds| < 2 |dx|$$

Il est possible de déterminer un nombre fini de cercles (L) tels que tout point de C soit intérieur à l'un d'eux.

Par emploi des propriétés précédentes il est possible de montrer que les formules de Green subsistent en supposant que la fonction à intégrer dans le domaine intérieur (C) y est continue et y possède des dérivées partielles bornées (ces dérivées sont mesurables comme limites de fonctions continues.)

Une fonction sera harmonique en un point si son laplacien ordinaire y est nul. Nous utiliserons le langage de M^r Gunther: fonction harmonique dans un domaine et fonction harmonique à l'intérieur d'un domaine. Et l'aide de l'inversion

le cas d'un domaine s'étendant à l'∞ sera ramené au cas d'un domaine à distance finie.

De la formule de Green, on déduit les formules classiques relatives aux fonctions harmoniques dans un domaine (identité de Green et ses conséquences). Rappelons également les formules de Gauss.

Chapitre 2 - Potentiel de simple couche

1) Nous rappelons ainsi la fonction

$$(1) \quad V_0 = \int_C m, \frac{1}{r_{10}} ds, \quad \text{si } M_0 \text{ désigne une fonction bornée et mesurable quand } M_0 \text{ décrit } (C) \quad (|M| < A)$$

Cette intégrale garde un sens si M_0 est sur (C) , de plus elle est harmonique en tout point à distance finie, pour qu'il en soit de même au point à l'∞ il faut et suffit que la masse totale soit nulle

$$\int_C m ds = 0$$

Du point de vue de la continuité on a l'inégalité

$$(2) \quad \left| \int_{\Omega} m, \frac{1}{r_{10}} ds, \right| < A \rho^{\frac{1}{2}}$$

où M_0 est un point de C et Ω une portion de C se projetant sur la tangente suivant le segment $(-\rho, +\rho)$, et l'inégalité

$$(3) \quad |V_{M_1} - V_{M_2}| < A r_{12} \cdot \left| \frac{1}{r_{12}} \right|$$

2) L'expression

$$(4) \quad \frac{dV_2}{dl} = - \int_C m, \frac{\cos(r_{12} l)}{r_{12}^2} ds,$$

représente la dérivée dans la direction l au point M_2 , cette expression et ses cas particuliers les dérivées partielles, sont uniformément continues dans tout domaine borné à distance non nulle de C .

Si M_2 est confondu avec M_0 de (C) l'intégrale du second membre de (4) a encore un sens, nous la noterons $\frac{dV_0}{dn}$, on démontrera que cette fonction de M_0 est régulièrement continue et que l'on a

$$(5) \quad \left| \int_{\Omega} m, \frac{\cos(r_{10} N_0)}{r_{10}^2} ds, \right| < A \rho^{\frac{1}{2}}$$

Quand M_2 tend vers M_0 en suivant la normale en M_0 , la direction l étant supposée parallèle à la normale N_0 , il n'y a aucune raison pour que (4) tende vers une limite. S'il en est ainsi nous la désignerons par l'indice i ou par l' - indice i selon que M_2 restera dans le domaine intérieur D_i ou dans le domaine extérieur D_e .

3) Supposons que C comporte une portion rectiligne sur laquelle se trouve M_0 . Dans ce qui suit nous ne considérerons que le potentiel dû à une portion AB de ce segment, ayant M_0 pour centre et $2a$ pour longueur. La partie délicate des raisonnements étant relative au voisinage de M_0 , les hypothèses faites n'enlèvent rien à la généralité. Par suite nous pourrions convenir de ne pas changer le nom de la fonction c'est-à-dire que nous poserons

$$V_0 = \int_{AB} M_1 \log r_{10} - ds,$$

En dérivant sans le signe somme on peut écrire

$$\frac{\partial V_2}{\partial y} = \int_{-a}^{+a} M_1 \frac{y_2}{r_{12}^2} dn_1,$$

d'où si M_2 est sur la normale $M_0 y$ à la distance positive δ de M_0

$$(6) \quad \frac{\partial V_2}{\partial y} = \int_{-a}^{+a} M_1 \frac{\delta}{x_1^2 + \delta^2} dn_1 = \int_{AB} M_1 d\varphi$$

avec

$$\varphi = \text{Arctg} \frac{x_1}{\delta} = \widehat{M_0 M_2 M_1}$$

En désignant par $R.S$ un segment de AB ayant M_0 pour centre et 2ρ pour longueur ($\rho < a$), on peut écrire (7)

$$\int_{AB} M_1 d\varphi = \int_{AB-RS} M_1 d\varphi + \int_{RS} (M_1 - M_0) d\varphi + M_0 \int_{RS} d\varphi$$

La première intégrale du second membre est bornée en valeur absolue par

$$(8) \quad 2A \int_p^a \frac{\delta \, dn}{x^2 + \delta^2} = 2A \left(A \operatorname{arctg} \frac{a}{\delta} - A \operatorname{arctg} \frac{p}{\delta} \right) < \pi A$$

la troisième intégrale a pour valeur

$$(9) \quad 2\mu_0 \times A \operatorname{arctg} \frac{p}{\delta} < \pi A$$

quant à la 2^e intégrale on peut seulement affirmer qu'elle est inférieure en module à $2\pi A$.

Or on sait que μ étant bornée et mesurable est continue presque partout à condition de négliger un ensemble E de densité nulle au point envisagé (Réson sur l'intégration par H. Lebesgue, nouvelle édition p. 198). Par suite si M_0 est un point de l'ensemble exceptionnel du début de l'énoncé, on peut seulement affirmer que les $\lim$ et $\liminf$ de $\frac{\partial V}{\partial y}$, quand $\delta \rightarrow 0$, sont finies. Si M_0 ne fait pas partie de cet ensemble exceptionnel de mesure nulle, désignons par E_p la portion de E située dans l'intervalle RS . On peut alors écrire

$$(10) \quad \int_{RS} (\mu_1 - \mu_0) \, d\varphi = \int_{RS - E_p} (\mu_1 - \mu_0) \, d\varphi + \int_{E_p} (\mu_1 - \mu_0) \, d\varphi$$

La 1^{re} intégrale du second membre est inférieure à $\pi \times \max |\mu_1 - \mu_0|$ dans $RS - E_p$ elle tend donc vers zéro avec p (continuité).

Quant à la 2^e elle est inférieure en module à

$$(11) \quad 2A \int_{E_p} \frac{dn_1}{\delta} = 2A \frac{2p}{\delta} \times \frac{\int_{E_p} dn_1}{2p}$$

Le dernier quotient représente la densité au point M_0 , cette quantité, que nous désignons par ρ , tend vers zéro avec p .

Juste ici p et δ étaient indépendants

les lier en posant $\delta = \rho [\varepsilon(\rho)]^\beta$; $0 < \beta < 1$

Faisons tendre ρ vers zéro, δ tend vers zéro, $\frac{\rho}{\delta}$ tend vers ∞ .
 Arctg $\frac{\rho}{\delta}$ vers $+\frac{\pi}{2}$, l'expression (11) étant de la forme

$$4A [\varepsilon(\rho)]^{1-\beta} ; \quad 0 < 1-\beta < 1$$

tend vers zéro, il en sera donc de même de (13). Dans les mêmes conditions Arctg $\frac{a}{\delta}$ et Arctg $\frac{\rho}{\delta}$ tendent vers $+\frac{\pi}{2}$, leur différence vers zéro, il en sera donc de même de $\int_{AB-RS} m, d\varphi$

Finalement en tenant compte de (9), on voit que l'on a

$$(12) \quad \left(\frac{dV_0}{dn} \right)_+ = \pi M_0$$

Si l'on avait fait tendre δ vers zéro par valeurs négatives on aurait obtenu

$$(13) \quad \left(\frac{dV_0}{dn} \right)_- = -\pi M_0$$

Revenons au cas général après n'avoir considéré que la portion C' de C intérieure au cercle de Liapounoff relatif au point M_0 .

A chaque point M de C' nous ferons correspondre sa projection m sur la tangente $M_0 x$. L'élément d'arc ds et sa projection dx étant liés par la relation:

$$ds = \frac{dx}{\cos \gamma}, \quad \gamma = \text{angle aigu de } N \text{ avec } M_0 y$$

on est conduit à faire correspondre au potentiel

$$(14) \quad V_2 = \int_{C'} M_1 \cdot \frac{1}{r_{12}} \cdot ds_1 = \int_{AB} \frac{M_1}{\cos \gamma} \times \frac{1}{r_{12}} \cdot dx$$

le potentiel

$$(15) \quad v_2 = \int_{AB} \frac{M_1}{\cos \gamma} \times \log r_{12} \times dx_1$$

AB désignant la projection de C' sur $M_0 x$ et r_{12} la distance de M_2 à m_1

Formons la différence

$$(16) \quad I = \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial y} = \int_{AB} \frac{M_1}{\cos \gamma} \left[\frac{\delta - y_1}{r_{12}^2} - \frac{\delta}{r_{12}^2} \right] dx_1$$

en supposant que M_2 a pour coordonnées $(0, \delta > 0)$. Nous allons montrer que la portion I de cette intégrale, relative à RS , tend

vers zéro uniformément par rapport à δ , quand ρ tend vers zéro (ici ρ et δ sont de nouveau indépendants).

En effet on peut écrire $J = J_1 + J_2$

avec (17) $J_1 = \int_{RS} \frac{M_1}{\cos \delta} \times \frac{-y_1}{r_{12}^2} \times dx_1$, $J_2 = \int_{RS} \frac{M_1}{\cos \delta} \left(\frac{1}{r_{12}^2} - \frac{1}{\rho_{12}^2} \right) dx_1$

or les inégalités (2) et (3) du chapitre 1 nous donnent

$$|J_1| < B \int_0^c \frac{x^{1+\delta}}{x^2} dx = C\rho^\delta$$

D'autre part on a

$$\left| \frac{1}{r_{12}^2} - \frac{1}{\rho_{12}^2} \right| = \left(\frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{\rho_{12}} \right) \times \frac{|r_{12} - \rho_{12}|}{r_{12} \rho_{12}} < \delta \cdot \frac{2}{|x_1| r_{12} \rho_{12}} < \frac{2a |x_1|^{1+\delta}}{x_1^2}$$

car $|r_{12} - \rho_{12}| < |y_1|$, $\delta < \rho_{12}$, r_{12} et $\rho_{12} > |x_1|$

Par suite $|J_2|$ est également inférieur à un nombre de la forme $C\rho^\delta$

De ce qui précède il résulte que l'on peut choisir ρ puis δ de façon que I ne diffère de

$$(18) \quad \int_{AB-RS} \frac{M_1}{\cos \delta} \times \frac{-y_1}{r_{10}^2} \times dx_1$$

que de $2 \times \frac{\varepsilon}{3}$ puisque la portion de l'intégrale (16) relative à $AB-RS$ est évidemment continue par rapport à δ , quand ρ est fixé.

Comme d'autre part l'intégrale (18) est convergente quand ρ tend vers zéro, il en résulte qu'il était possible de fixer ρ avant δ de façon que (18) diffère de sa limite de moins de $\frac{\varepsilon}{3}$. Finalement on peut affirmer que l'on a

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} I = \int_{AB} \frac{M_1}{\cos \delta} \times \frac{-y_1}{r_{10}^2} dx_1 = \frac{dV_0}{dn}$$

ce qui peut encore s'écrire en tenant compte de (12) (13) et (16).

$$(19) \quad \left(\frac{dV_0}{dn} \right)_e = \frac{dV_0}{dn} + \pi M_0$$

$$(20) \quad \left(\frac{dV_0}{dn} \right)_i = \frac{dV_0}{dn} - \pi M_0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{normale positive dirigée} \\ \text{vers l'extérieur} \end{array} \right)$$

Ce dernier résultat suppose que M_0 n'est pas choisi dans un certain ensemble de (c) dont la mesure est nulle. Si M_0 est un point

exceptionnel on peut seulement affirmer que les $\overline{\lim}$ et $\underline{\lim}$ de $\frac{\partial V_2}{\partial y}$, quand S tend vers zéro, sont finies.

Remarques 1) Nous avons effectué le changement de variable dans le cas de l'intégration des fonctions continues, nous allons montrer que ceci est légitime. Partons d'une intégrale de la forme $\int_{C_1} f(s) ds$

Pour fixer les idées prenons comme origine des arcs et pour sens + celui qui correspond aux x croissants.

$$\text{On a donc } \int_{C_1} f(s) ds = \int_a^b f(s) ds$$

en désignant par a et b les abscisses curvilignes des points d'entrée et de sortie de C_1 dans L_0 . s est une fonction de x continue et croissante, d'autre part $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos \delta}$ existe et elle est bornée. Donc si $f(s)$ est continue, l'intégrale de Lebesgue coïncidant avec l'intégrale de Riemann on a

$$\int_a^b f(s) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[s(x)] \frac{dx}{\cos \delta}$$

α et β étant les abscisses respectives des points d'entrée et de sortie de C dans L_0

En utilisant le théorème de Lebesgue sur le passage à la limite (I. I. I p. 125), on passe du cas où $f(s)$ est continue à celui où cette fonction est mesurable B (il reste entendu que nous continuons de supposer qu'il s'agit de fonctions bornées). Il est clair, en effet, $\frac{f[s(x)]}{\cos \delta}$, considérée comme fonction de x , est mesurable B, puisque la correspondance $(s|x)$ fait correspondre un intervalle x à un intervalle et que $\frac{1}{\cos \delta}$ est continue ($\delta < \frac{\pi}{4}$)

On passe finalement du cas où $f(s)$ est mesurable B au cas où $f(s)$ est simplement mesurable en se rappelant qu'une fonction mesurable B qui n'en diffère que sur un ensemble de mesure nulle (Intégrales de Lebesgue par de Laxillès-Laussier p. 33).

On observe, d'autre part, que, pour être négligé dans l'intégration, la

justification de notre changement de variable en résulte.

2) La fonction μ_1 est par hypothèse bornée et mesurable, en supposant que M_1 coïncide avec un point M_0 où cette fonction est continue quand on néglige un certain ensemble E de densité nulle en M_0 , nous avons considéré comme évident que μ_1 , considérée comme fonction de x était encore mesurable et que de plus l'ensemble $\mathcal{E}$ projection de E avait lui aussi une densité nulle en M_0 . La justification de la 1^{ère} affirmation se fait facilement à partir de la 1^{ère} remarque. Pour justifier la 2^e affirmation, rappelons que l'on a

$$(21) \quad \lim_{\substack{s_1 \rightarrow 0 \\ s_0 \rightarrow 0}} \frac{\int_{s_0}^{s_1} \varphi(s) ds}{s_1 - s_0} = 0$$

$\varphi(s)$ désignant la fonction caractéristique de E . Or en vertu de la 1^{ère} remarque $\int_{s_0}^{s_1} \varphi(s) ds = \int_{x_0}^{x_1} \varphi[s(x)] \frac{dx}{\cos \gamma} = \int_{x_0}^{x_1} \psi(x) \frac{dx}{\cos \gamma}$

x_0 et x_1 correspondant respectivement à s_0 et s_1 . Par suite on peut écrire

$$\frac{\int_{x_0}^{x_1} \psi(x) dx}{x_1 - x_0} = \frac{\int_{x_0}^{x_1} \psi(x) \cos \gamma \cdot \frac{dx}{\cos \gamma}}{x_1 - x_0} < \frac{\int_{x_0}^{x_1} \psi(x) \frac{dx}{\cos \gamma}}{x_1 - x_0} \\ < \frac{\int_{s_0}^{s_1} \varphi(s) ds}{s_1 - s_0} \times \frac{s_1 - s_0}{x_1 - x_0}$$

$\psi(x)$ représentant la fonction caractéristique de $\mathcal{E}$, le premier quotient n'est pas autre chose que la densité moyenne de $\mathcal{E}$. En vertu de (21) et de la dernière inégalité on peut affirmer que la densité $\mathcal{E}$ en M_0 est nulle, puisque $\frac{s_1 - s_0}{x_1 - x_0}$ a pour limite l'unité comme on s'en assure aisément à l'aide de la formule des accroissements finis.

3) Si μ_1 est continue, les relations (19) et (20) ont lieu partout et les limites sont atteintes uniformément et même régulièrement si la continuité de μ_1 est régulière.

Avec l'hypothèse de continuité il n'y a pas lieu d'introduire l'ensemble E_ρ et la démonstration peut se faire en liant, par exemple, ρ et S par la relation $S = \rho^2$

5) Si U et V sont harmoniques dans D_i on sait que l'on a en vertu de la formule de Green

$$\int_{D_i} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\sigma = \int_C U \frac{dV_i}{dn} ds$$

Si U et V sont des potentiels de simples couches portées par la frontière, on démontre (pour l'espace voir T.P.G.) que la formule subsiste moyennant la continuité de la densité et ceci bien que U et V soient seulement harmoniques à l'intérieur de D_i .

Nous démontrerons plus loin que la formule ci-dessus subsiste en supposant que $U = V$ et que la densité est seulement bornée et mesurable.

Chapitre 3. Potentiel de double couche

1) Nous appellerons ainsi la fonction de M_0

$$(1) \quad W_0 = \int_C \mu_0 \frac{\cos(\tau_{10} N_1)}{r_{10}} ds,$$

Par dérivation sous le signe $\int$ on s'assure que cette fonction admet des dérivées continues de tous les ordres dans tout domaine à distance non nulle de C et qu'elle est harmonique dans un tel domaine (ce domaine peut d'ailleurs s'étendre à l' ∞ et l'on a $W_\infty = 0$)

Si M_0 est sur C l'intégrale du second membre de (1) conserve un sens, cette fonction que nous noterons $\overline{W}_0$ est régulièrement continue. Quand M_2 tend vers M_0 de C en restant dans D_i (ou dans D_e), W_2 tend vers une limite $W_{i,0}$ (ou $W_{e,0}$) on démontre que si la densité est continue on a

$$(2) \quad W_{i,0} = \overline{W}_0 + \pi \mu_0 \quad W_{e,0} = \overline{W}_0 - \pi \mu_0$$

Nous allons montrer que ces formules subsistent presque

partout en supposant la densité bornée et mesurable et que M_2 tend vers M_0 en restant sur la normale. Aux points exceptionnels nous pourrions seulement affirmer que $\overline{\lim}$ et $\underline{\lim}$ de W_2 sont finies quand M_2 tend vers M_0 dans les conditions précisées ci-dessous.

2) Commençons par le cas particulier d'une double couche portée par le segment rectiligne AB (voir chapitre 2). Les normales étant parallèles on a

$$\cos(\tau_{10} N_1) = \cos(\tau_{10} N_0)$$

$$W_2 = - \frac{\partial V_2}{\partial y}$$

Par suite on a, si M_0 est un point où μ est continu à un ensemble de densité nulle près,

$$(3) \quad W_0^+ = -\pi \mu_0, \quad W_0^- = \pi \mu_0$$

en désignant par W_0^+ et W_0^- les limites de W_2 quand S tend vers zéro soit par valeurs positives soit par valeurs négatives. Si M_0 est un point de l'ensemble exceptionnel on peut seulement affirmer que $\overline{\lim} W_2$ et $\underline{\lim} W_2$ sont finies.

Dans le cas d'une double couche portée par une courbe de Liapounoff, au potentiel

$$(4) \quad W_2 = \int_C \mu_1 \frac{\cos(\tau_{12} N_1)}{\tau_{12}} ds, = \int_{AB} \frac{\mu_1}{\cos \gamma} \cdot \frac{\cos(\tau_{12} N_1)}{\tau_{12}} dx,$$

nous ferons correspondre le potentiel

$$(5) \quad w_2 = \int_{AB} \frac{\mu_1}{\cos \gamma} \cdot \frac{\cos(\rho_{12}, Oy)}{\rho_{12}^2} dx,$$

Étudions la différence

$$I = W_2 - w_2 = \int_{AB} \frac{\mu_1}{\cos \gamma} \left[\frac{x_1 \cos(N, x) + (y_1 - S) \cos(N, y) + S}{\tau_{12}^2} + \frac{S}{\rho_{12}^2} \right] dx,$$

où l'on suppose que M_2 a pour coordonnées 0 et $S > 0$.

Nous allons montrer que la portion J de cette intégrale, relative à RS , tend vers zéro uniformément par rapport à S , quand S tend vers zéro. En effet on peut écrire

$$J = J_1 + J_2 + J_3$$

avec

$$J_1 = \int_{RS} \frac{\mu_1}{\cos \gamma} - \frac{x_1 \cos(N, x) + y_1 \cos(N, y)}{r_{12}^2} dx_1$$

$$J_2 = \int_{RS} \frac{\mu_1}{\cos \gamma} \left[\frac{1}{\rho_{12}^2} - \frac{1}{r_{12}^2} \right] dx_1$$

$$J_3 = \int_{RS} \frac{\mu_1}{\cos \gamma} \times \frac{1 - \cos(N, y)}{r_{12}^2} dx_1$$

En vertu des inégalités du chapitre 1 on voit que J_1 et J_2 se comportent comme les intégrales correspondantes du chapitre précédent. Pour étudier l'intégrale J_3 remarquons qu'elle est inférieure en module à un nombre de la forme:

$$aAS \int_{RS} \frac{1 - \cos \gamma}{\rho_{12}^2} dx_1 = oA \int_{RS} \frac{S}{\rho_{12}} \cdot \frac{1 - \cos \gamma}{\rho_{12}} dx_1$$

$$< b \int_{RS} \frac{1 - \cos \gamma}{\rho_{12}} dx_1 < b \int_{RS} \frac{|x_1|^\lambda}{x_1^2} dx_1 < c \rho^\lambda \text{ puisque}$$

$$\frac{\rho_{12}}{r_{12}} < c \neq \infty \text{ (comme on s'en assure en reprenant un type de raisonnement de T. P. G.)}$$

$\frac{S}{\rho_{12}} < 1$ et que le cos. de l'angle de la normale avec une direction fixe est régulièrement continue. Finalement J_3 tend vers zéro avec ρ , uniformément par rapport à S . La suite du raisonnement s'effectue comme au chapitre 2.

Chapitre 4. Formules généralisées de Poisson et Dini

Application à l'étude des fonctions mesurables.

1) L'intégrale de Poisson, considérée a priori comme une fonctionnelle d'argument $f(\theta)$ bornée et mesurable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, définit une fonction U_0 harmonique en tout point intérieur au cercle et telle que l'on ait presque partout

$$U_{i,0} = f_0$$

$U_{i,0}$ étant la limite de U_i quand M_i tend vers M_0 en suivant le rayon OM_0 .

En effet on peut écrire l'intégrale de Poisson sous la forme. (1) $U_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1 \frac{\cos(r_{12} N_1)}{r_{12}} R d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1 d\theta$

M_2 ayant pour coordonnées polaires $\theta_2 = \theta_0$, $\rho < R$; si l'on fait tendre ρ vers R on obtient presque partout, en vertu des résultats du chapitre 3.

$$\lim_{\rho \rightarrow R} U(\theta_0, \rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1 \frac{\cos(\tau_{10} N_1)}{\tau_{10}} R d\theta + \pi \frac{f_0}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1 d\theta_1$$

où M_0 et M_1 étant sur le cercle on a

$$\tau_{10} = 2R \cos(\tau_{10} N_1)$$

par suite

$$\lim_{\rho \rightarrow R} U(\theta_0, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1 d\theta + f_0 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1 d\theta = f_0$$

comme nous voulions l'établir.

Remarque. Ce résultat a été obtenu par Faber dans sa thèse par une méthode toute différente.

2) Commençons à établir la formule de Dirichlet par un artifice classique lorsqu'il s'agit de la formule de Goursat. Soit M'_0 le symétrique de M_0 par rapport au cercle C , en posant $\overrightarrow{\tau'_{10}} = \overrightarrow{M'_0 M_1}$, on sait que l'on a

$$(2) \quad \rho \rho' = R^2, \quad \frac{\tau_{10}}{\rho} = \frac{\tau'_{10}}{R}, \quad \frac{\tau_{10}}{R} = \frac{\tau'_{10}}{\rho'} \text{ avec } \rho = OM_0, \rho' = OM'_0$$

Comme conséquence de l'identité de Green on sait que l'on a si U est harmonique dans le cercle $(0, R)$

$$(3) \quad \begin{aligned} 2\pi U_0 &= -R \int_0^{2\pi} f_1 \log \tau'_{12} d\theta + R \int_0^{2\pi} U_1 \frac{\cos(\tau'_{10} N_1)}{\tau'_{10}} d\theta, \\ 0 &= -R \int_0^{2\pi} f_1 \log \tau'_{12} d\theta + R \int_0^{2\pi} U_1 \frac{\cos(\tau'_{10} N_1)}{\tau'_{10}} d\theta, \\ &\text{avec } f_1 = \left(\frac{dU_1}{du} \right)_i \end{aligned}$$

Les triangles $OM_0 M_1$ et $OM'_0 M_1$ nous donnent en tenant compte de (2) $\frac{1}{\tau_{10}} \cos(\tau_{10} N_1) = \frac{\tau_{10}^2 + R^2 - \rho^2}{2\tau_{10}^2 R}$, $\frac{1}{\tau'_{10}} \cos(\tau'_{10} N_1) = \frac{\tau_{10}^2 + \rho^2 - R^2}{2\tau_{10}^2 R}$

Portant ces résultats dans (3) on obtient par addition

$$\begin{aligned} 2\pi U_0 &= -R \int_0^{2\pi} f_1 \log(\tau_{10} \tau'_{10}) d\theta + \int_0^{2\pi} U_1 d\theta, \\ &= R \int_0^{2\pi} f_1 \log \frac{R \tau_{10}^2}{\rho} d\theta + \int_0^{2\pi} U_1 d\theta; \end{aligned}$$

$$= 2R \int_0^{2\pi} f_1 \log r_{10} \, d\theta - R \log \frac{R}{\rho} \int_0^{2\pi} f_1 \, d\theta + \int_0^{2\pi} U_1 \, d\theta$$

or on sait que l'on a

$$\int_0^{2\pi} f_1 \, d\theta = 0 \quad \text{et} \quad 2\pi U(\text{au centre}) = \int_0^{2\pi} U_1 \, d\theta,$$

en négligeant cette constante on voit que l'on a

$$(4) \quad U_0 = \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1 \log r_{10} \, d\theta,$$

nous obtenons ainsi la formule de Dini.

Nous allons la justifier, a posteriori, en supposant que f_1 est borné et mesurable au lieu d'être continue. En vertu des résultats du chapitre (2) on peut écrire en tenant compte du fait que $r_{10} = R \cos(\tau_{10} N_1)$ quand M_0 est sur le cercle

$$\left(\frac{dU_0}{du} \right)_i = -\frac{R}{\pi} \times \int_0^{2\pi} f_1 \frac{\cos(\tau_{10} N_1)}{r_{10}} \, d\theta - \pi \cdot \frac{f_0}{R}$$

$$= -\frac{R}{\pi} \times \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} f_1 \, d\theta + f_0$$

$$= 0 + f_0$$

c'est précisément ce que nous voulions établir

3) A chaque fonction $f(\theta)$ bornée et mesurable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ (cas auquel on peut toujours se ramener), la formule de Poisson fait correspondre une fonction $U(\theta, \rho)$ continue par rapport à ρ et θ en tout point du cercle $\rho < R$. Donnons à ρ une suite de valeurs croissantes

$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$

tendant vers R quand n tend vers l' ∞ , nous obtenons une suite de fonctions continues $F_1(\theta) = U(\theta, \rho_1), F_2(\theta) = U(\theta, \rho_2), \dots, F_n(\theta) = U(\theta, \rho_n), \dots$ tendant vers $f(\theta)$ quand n tend vers l' ∞ , à condition que θ ne soit pas choisi dans un ensemble exceptionnel de mesure nulle.

Nous venons de démontrer que toute fonction bornée et mesurable est égale presque partout à la limite d'une suite de fonctions continues.

On sait d'autre part que les plus grandes et plus petites limites (donc en particulier la limite unique si elle existe) de fonctions mesurables (donc en particulier continues) sont des fonctions mesurables. Le dernier résultat ne suppose pas que les fonctions envisagées soient finies ni même qu'elles soient bornées. Réunissant les 2 résultats ci-dessus on peut énoncer :

Théorème - Pour qu'une fonction bornée soit mesurable il suffit qu'elle soit égale à la limite d'une suite de fonctions continues et cela est nécessaire si l'on convient de négliger un certain ensemble exceptionnel de mesure nulle.

On peut encore énoncer : Théorème - Pour qu'une fonction bornée soit mesurable il faut et il suffit qu'elle soit égale presque partout à une fonction des classes 0 ou 1.

4) Cherchons à étendre ce théorème au cas des fonctions non bornées et même au cas des fonctions susceptibles de prendre les valeurs $+\infty$ ou $-\infty$. Supposons que $f(\theta)$ soit seulement mesurable, à cette fonction la transformation de Poisson fait correspondre la fonction mesurable.

$$g(\theta) = \frac{f(\theta)}{1 + |f(\theta)|}$$

qui est bornée par les nombres -1 et $+1$. A cette dernière fonction l'intégrale de Poisson fait correspondre la fonction

$$V(\theta_2, \rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \left[\frac{\cos(\pi_{12} N_1)}{\pi_{12}} - \frac{1}{2R} \right] R d\theta,$$

$$0 \leq \theta_2 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho < R$$

A cette nouvelle fonction on peut faire correspondre la fonction

$$U(\theta_2, \rho) = \frac{V(\theta_2, \rho)}{1 - |V(\theta_2, \rho)|}$$

qui tend vers $f(\theta_0)$ lorsque $\theta_2 = \theta_0$ et que ρ tend vers R . Nous allons montrer que U est continue en tout point intérieur au cercle $(0, R)$. Pour cela il suffit de montrer qu'en un tel point on a

$$(5) \quad -1 < V(\theta_2, \rho) < 1$$

puisque la fonction V est continue. Or si on se reporte à l'une des formules du chapitre 2 on voit que l'on a (avec les notations de ce chapitre)

$$\left| \frac{\partial V_2}{\partial g} \right| \leq \pi \times \max |\mu|$$

inégalité qui est susceptible de remplacer les formules (19) et (20) de ce chapitre, lorsque l'on suppose que M_2 tend vers un point excep-

-tionnel M_0 de la frontière.

Il en résulte qu'en voisinage d'un tel point on a

$$\frac{\partial V_2}{\partial y} = \int_c \mu_1 \frac{\cos(\alpha_{10} N_0)}{r_{10}} ds, + \pi M + \varepsilon$$

ε tendant vers zéro avec δ et M restant en module inférieur au maximum de $|\mu|$. En transposant pour le cas du potentiel de double couche on obtient

$$W_2 = \int_c \mu_1 \frac{\cos(\alpha_{10} N_1)}{r_{10}} ds, + \pi M + \varepsilon$$

Par suite le raisonnement de la subdivision 1 permet d'écrire

$$\begin{aligned} V(\theta_0, \rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1 d\theta, + F + \varepsilon - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_2 d\theta, \\ &= F + \varepsilon \end{aligned}$$

F étant inférieure en module au maximum de g et ε tendant vers zéro quand $\rho \rightarrow R$. D'autre part V étant harmonique en tout point intérieur au cercle $(0, R)$ se rapproche de ses bornes sur la frontière, on peut donc affirmer que les inégalités (5) sont satisfaites puisque $|\varepsilon|$ peut être rendue arbitrairement petite.

Finalement nous sommes assurés que $f(\theta_0)$ est égale presque partout à la limite de $U(\theta_0, \rho)$ quand ρ tend vers R . On peut donc énoncer : Théorème. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit mesurable est qu'elle soit égale presque partout à la limite d'une suite de fonctions continues.

Si l'on se reporte au théorème de Baire sur les fonctions de classe (1) on peut énoncer

Théorème - La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit mesurable est qu'elle soit ponctuellement discontinue presque partout sur tout ensemble parfait.

Exemple : La fonction de classe (2) égale à 1 pour x rationnel et à zéro pour x irrationnel est presque partout continue. Ici l'ensemble exceptionnel de mesure nulle est l'ensemble

des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ étant irrationnel l'ensemble à négliger pour que l'on puisse considérer la fonction comme étant continue est encore l'ensemble des nombres rationnels cet ensemble étant de mesure nulle est évidemment de densité nulle.

Remarques - 1) Comme exemple de fonction ponctuellement discontinue ou de classe (1) on peut citer les fonctions semi-continues inférieurement (ou supérieurement). Nous allons donner à cette occasion un exemple de fonction semi-continue inférieurement déduite de la structure des ensembles ouverts.

Soient M un point d'un ensemble ouvert O situé dans le plan des x, y et $M \Delta$ une demi-droite de ce plan faisant l'angle θ avec l'axe de x . M étant un point intérieur (c'est-à-dire à distance non nulle de son complémentaire CO) il existe sur $M \Delta$ un premier point P n'appartenant pas à O . Posons $\rho = \overline{MP}$, cette quantité est une fonction de θ admettant pour chaque valeur de θ , une plus grande limite $\overline{\rho}$ et une plus petite limite $\underline{\rho}$. Si Q est le point de $M \Delta$ tel que $\overline{MQ} = \underline{\rho} \leq \rho$, ce point est limite de points appartenant au complémentaire CO de O . CO étant fermé contient tous ses points limites et en particulier le point Q . Or P est par hypothèse le premier point de $M \Delta$ qui appartient à CO , donc $\rho \leq \underline{\rho}$ et par suite $\rho = \underline{\rho}$ en vertu d'une inégalité indiquée plus haut. La fonction $\rho(\theta)$ est donc semi-continue inférieurement. Si O est bornée, la fonction ρ étant de classe 1 est mesurable, étant bornée elle est sommable. À partir de cette dernière remarque il est possible d'en déduire un procédé de mesure des ensembles ouverts.

2) Une fonction sommable étant un cas particulier de fonction mesurable on peut énoncer :

Pour qu'une fonction soit sommable il faut qu'elle soit égale presque partout à la limite d'une suite de fonctions continues.

On peut donner de ce théorème une démonstration directe. Soit $f(\theta)$ une fonction sommable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. La fonction continue.

$$F(x) = \int_0^x f(\theta) d\theta, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

admet presque partout $f(\theta)$ pour dérivée, on a donc presque partout

$$f(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\theta) \text{ avec } f_n(\theta) = \frac{F(\theta + \frac{1}{n}) - F(\theta)}{\frac{1}{n}}$$

Par contre la limite d'une fonction continue n'est pas nécessairement sommable, même après avoir modifié cette limite sur un ensemble de mesure nulle.

3) On sait que si $\mu^{(p)}$ est continue on a (chapitre 2, section 5)

$$(6) \int_{D_i} \sum \left(\frac{\partial U^{(p)}}{\partial n} \right)^2 d\sigma = \int_c (U^{(p)}) \frac{dU^{(p)}}{dn} ds \text{ avec } U_0^{(p)} = \int_c \mu^{(p)} \log r_{10} ds,$$

Cette formule étant à la base de l'étude des problèmes de Neumann et de Dirichlet il est naturel d'essayer de l'étendre au cas où la densité μ est bornée et mesurable. En considérant μ comme étant égale presque partout à la limite d'une suite de fonctions continues $\mu^{(p)}$ il est possible de démontrer que l'identité (6) subsiste. Indiquons seulement que la démonstration se fait en utilisant l'inégalité (2), les formules 19 et 20 du chapitre 2 et le théorème de Lebesgue sur le passage à la limite sous le signe somme.

Proposition donnée par la Faculté:
Espaces de Riemann

Vu et approuvé :

Le Doyen,

R. Douin

Vu et permis d'imprimer :

Lyon le - 6 MAI 1946
Le Recteur, Président du Conseil
de l'Université,

Ellix

Les Membres du Jury,

Sin

Byrand

Walcios

